Het abc-vermoeden

Deze lesbrief is afkomstig van www.rekenmeemetabc.nl. Op deze site staat nog veel meer informatie, over het onderwerp van deze lesbrief en andere wiskundige onderwerpen. Ook zijn hier puzzels en wedstrijden te vinden.

Het abc-vermoeden is bedacht door de wiskundigen David Masser en Joseph Oesterlé in 1985. In al die jaren heeft nog niemand kunnen achterhalen of zij gelijk hebben of niet. Inmiddels is et abc-vermoeden uitgegroeid tot één van de belangrijkste vraagstukken in de getaltheorie. In deze lesbrief maak je kennis met het abc-vermoeden.

Priemontbinding

Elk geheel getal groter dan 1 heeft een priemontbinding. Dat is een manier om het getal te schrijven als een product van zoveel mogelijk andere getallen, zonder daarbij 1 te gebruiken. We kunnen bijvoorbeeld het getal 18 schrijven als $18 = 2 \times 3 \times 3$. We kunnen geen van de getallen in dit product zelf nog schrijven als een product, tenzij we 1 gebruiken. Dit is dus de priemontbinding van 18 en de getallen 2 en 3 noemen we de priemfactoren van 18.

Opgave 1: Waarom is $60 = 2 \times 5 \times 6$ niet de priemontbinding van 60? Wat moet het wel zijn?
Opgave 2: Wat is de priemontbinding van 12? En van 63? En van 125?

Sommige getallen kunnen we niet als een product van twee of meer andere getallen schrijven zonder een 1 te gebruiken. Dit zijn priemgetallen. Een voorbeeld van een priemgetal is 7. De priemontbinding van 7 is dus $7 = 7$. De enige priemfactor van 7 is 7 zelf.

Opgave 3: Welke van de getallen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 13, 19 en 21 zijn priemgetallen?
Opgave 4: Kijk eens naar de priemontbindingen van opgaven 1 en 2. Zijn de priemfactoren in die ontbindingen allemaal priemgetallen? Kun je daar een verklaring voor geven?

Het radicaal

Met behulp van de priemontbinding kunnen we het radicaal van een getal bepalen. Dit is het product van de *verschillende* priemfactoren in het getal. Elke priemfactor die voorkomt in de priemontbinding mag je daarbij dus maar één keer meetellen. We hebben al gezien dat $18 = 2 \times 3 \times 3$. Hierin komt 3 twee keer voor. Het radicaal van 18 is dus $\text{rad}(18) = 2 \times 3 = 6$.

Opgave 5: Bereken het radicaal van de getallen 6, 8, 24, 25, 36, 80 en 81.
Opgave 6: Bestaan er getallen die gelijk zijn aan hun eigen radicaal? Zo ja, noem er minstens drie.

Opgave 7: Welke getallen hebben allemaal radicaal 2? Hoeveel zijn dat er?

Abc-drietallen

Je hebt gezien dat sommige getallen een radicaal hebben dat veel kleiner is dan het getal zelf. Met drie van zulke getallen kun je een abc-drietal maken. Een abc-drietal bestaat uit getallen a, b en c zodat $a + b = c$ en zodat het radicaal van het product van de drie getallen kleiner is dan het grootste getal.

Opgave 8: Neem $a = 1$ en $b = 8$. Bereken c. Bereken ook $r = \text{rad}(a \times b \times c)$. Als r kleiner is dan c, dan is dit een abc-drietal. Is dat inderdaad zo?
Opgave 9: Doe hetzelfde voor $a = 5$ en $b = 27$. Krijg je een abc-drietal?
Opgave 10: Doe hetzelfde voor $a = 2$ en $b = 9$. Krijg je een abc-drietal?
Opgave 11: Bereken $\text{rad}(2 \times 16 \times 18)$. Bereken ook $\text{rad}(4 \times 32 \times 36)$. En $\text{rad}(8 \times 64 \times 72)$.

Je ziet dat als we steeds alledrie de getallen met 2 vermenigvuldigen, het radicaal gelijk blijft. Tegelijkertijd wordt het grootste getal, c dus, wel groter. Zo wordt het wel heel makkelijk om te zorgen dat c groter wordt dan het radicaal! Om dat te voorkomen, spreken we af dat als je naar de priemontbinding van a, b en c kijkt, dezelfde priemfactor niet in alledrie de ontbindingen voor mag komen. Het drietal $(1, 8, 9)$ is dus wel een abc-drietal, maar $(2, 16, 18)$ niet.

Opgave 12: Bepaal van de volgende drietallen of het abc-drietallen zijn:

- $(1, 63, 64)$
- $(3, 45, 48)$
- $(4, 23, 27)$
- $(32, 49, 81)$

Opgave 13: Probeer zelf een abc-drietal te maken. (Let op, dit is best lastig!)

Er bestaan oneindig veel abc-drietallen. Wel worden de getallen dan vaak heel groot en ligt r meestal heel dicht bij c. Aan de hand van hoe dicht r bij c ligt, wordt de kwaliteit van een drietal bepaald. Dit is een getalletje dat meestal net iets groter dan 1 is. Het abc-vermoeden zegt dat deze kwaliteit nooit heel groot kan worden. We weten niet of het waar is, maar de grootste kwaliteit die we tot nu toe gevonden hebben, is ongeveer 1,63.