Het vermoeden van Goldbach

Deze lesbrief is afkomstig van www.rekenmeemetabc.nl. Op deze site staat nog veel meer informatie, over het onderwerp van deze lesbrief en andere wiskundige onderwerpen. Ook zijn hier puzzels en wedstrijden te vinden.

De Duitse wiskundige Christian Goldbach ontdekte in 1742 een merkwaardige eigenschap van getallen. Tot op dit moment is nog niemand in staat geweest om met zekerheid vast te stellen dat deze eigenschap voor alle getallen geldt: het *Vermoeden van Goldbach* is nog niet bewezen. Om te begrijpen wat het vermoeden zegt, leggen we eerst uit wat een priemgetal is.

Priemgetallen

Als je een getal a kunt delen door een getal b zonder dat je daarbij een rest of iets achter de komma overhoudt, dan zeggen we dat a *deelbaar* is door b. De breuk $\frac{a}{b}$ kunnen we dan vereenvoudigen tot een geheel getal.

Opgave 1: Door welke getallen is 12 deelbaar? Door welke getallen is 13 deelbaar?
Opgave 2: Is elk positief geheel getal a deelbaar door 1?
Opgave 3: Er bestaat een positief geheel getal a dat deelbaar is door precies één getal b. Wat zijn a en b?
Opgave 4: Bekijk nu een positief geheel getal a dat minstens 2 is. Kun je behalve 1 nog een ander getal bedenken waar a zeker deelbaar door is?

Een positief geheel getal a heet een *priemgetal* als het deelbaar is door precies twee verschillende positieve gehele getallen.

Opgave 5: Is 1 een priemgetal?
Opgave 6: Maak een lijst van alle priemgetallen kleiner dan 20.
Opgave 7: Hoeveel even priemgetallen zijn er?

De som van twee priemgetallen

Opgave 8: Tel elk priemgetal dat je bij opgave 6 hebt gevonden bij zichzelf op. Je krijgt nu allemaal even getallen. Wat is het eerste even getal groter dan 2 dat je niet krijgt?
Opgave 9: Kun je dit getal toch maken door twee verschillende priemgetallen bij elkaar op te tellen?
Opgave 10: Probeer nu alle even getallen groter dan 2 en kleiner dan 38 te maken door twee priemgetallen (twee dezelfde of twee verschillende) op te tellen.

Het vermoeden van Goldbach zegt dat elk even getal groter dan 2 te krijgen is door twee priemgetallen bij elkaar op te tellen, waarbij die priemgetallen niet per se verschillend hoeven te zijn.

Opgave 11: Breid je lijst met priemgetallen nog wat uit en controleer voor alle even getallen tot en met 60 dat het vermoeden van Goldbach waar is.
Opgave 12: Goldbach dacht niet dat zijn vermoeden ook waar was voor oneven getallen. Wat denk jij? Kun je een oneven getal groter dan 2 vinden dat niet te maken is door twee priemgetallen op te tellen?

Een variant op het vermoeden van Goldbach zegt dat elk oneven getal groter dan 7 te krijgen is door drie oneven priemgetallen bij elkaar op te tellen. Ook dit is nog niet bewezen.

Opgave 13: Controleer voor alle oneven getallen kleiner dan 60 dat deze variant op het vermoeden van Goldbach waar is.
Opgave 14: Als het vermoeden van Goldbach bewezen wordt, dan is de variant voor oneven getallen ook meteen bewezen. Zie jij hoe?