Perfecte getallen

Deze lesbrief is afkomstig van www.rekenmeemetabc.nl. Op deze site staat nog veel meer informatie, over het onderwerp van deze lesbrief en andere wiskundige onderwerpen. Ook zijn hier puzzels en wedstrijden te vinden.

Mensen zijn al heel lang gefascineerd door getallen. Al in de oudheid werden namen gegeven aan getallen met bijzondere eigenschappen. Zo kregen getallen ook een symbolische betekenis. Een voorbeeld van getallen met een bijzondere naam en bijzondere eigenschappen vormen de *perfecte getallen.* In deze lesbrief zullen we stap voor stap een aantal eigenschappen van deze getallen bekijken.

Definitie: Als een getal a deelbaar is door een getal b, noemen we b een *deler* van a.

Een voorbeeld: de delers van 8 zijn 1, 2, 4 en 8.

Opgave 1: Wat zijn de delers van 12? En van 13?
Opgave 2: Tel alle delers van 6 bij elkaar op. Doe dit ook voor 28. Kun je een overeenkomst ontdekken?

De getallen 6 en 28 in bovenstaande opgave zijn niet willekeurig gekozen. Het zijn voorbeelden van perfecte getallen. Een getal is perfect als de som van al zijn delers precies gelijk is aan twee keer het getal zelf.

Opgave 3: Is 12 een perfect getal? En 34?

Getallen waarbij de som van de delers kleiner is dan twee keer het getal worden *ontoereikend* genoemd en getallen waarvan de som van de delers groter is dan twee keer het getal worden *overvloedig* genoemd. Getallen die daar precies tussenin zitten, dus waarvan de som van de delers precies twee keer het getal is, zijn dus precies goed, en worden daarom perfect genoemd.

Alle perfecte getallen die tot nu toe gevonden zijn, zijn even. Het is niet bekend of er oneindig veel zijn. Wel is bekend dat alle even perfecte getallen geschreven kunnen worden als $2^{k-1}(2^k - 1)$, waarbij k een geheel getal groter dan 1 is, dus 2, 3, 4 enzovoorts.

Opgave 4: Vul $k = 2$ in in de formule $2^{k-1}(2^k - 1)$. Welk perfect getal krijg je?
Opgave 5: Welk perfect getal vind je voor k=3?

Het getal $2^{k-1}(2^k - 1)$ is niet voor elke k een perfect getal. Het is alleen perfect als $2^k - 1$ een priemgetal is. Een getal is een priemgetal, als zijn enige delers 1 en zichzelf zijn.

Je gaat nu aantonen dat $2^{k-1}(2^k-1)$ inderdaad perfect is, als 2^k-1 priem is.

Opgave 6: Wat is de som van de delers van een priemgetal?
Opgave 7: Wat zijn de delers van 2^3? En van 2^5? En van 2^k?
Opgave 8: Tel 1, 2, 2^2 en 2^3 bij elkaar op. Tel nu ook 2^4 erbij op. En 2^5. Kun je een algemene formule ontdekken voor de drie gevonden getallen?
Opgave 9: Wat is dus de som van de delers van 2^k?

Stel dat we twee getallen a en b hebben, die niet deelbaar zijn door eenzelfde getal (behalve dan natuurlijk door 1). De som van de delers van $a \times b$ is dan gelijk aan (de som van de delers van a) $\times$ (de som van de delers van b).

Opgave 10: Controleer dit voor $a = 8$ en $b = 9$.

Stel dat we een getal $a = 2^{k-1}(2^k-1)$ hebben, met (2^k-1) een priemgetal. We weten dat a het product is van twee getallen, namelijk van 2^{k-1} en (2^k-1).

Opgave 11: Heeft 2^{k-1} oneven delers? Heeft (2^k-1) even delers? Is er dus een ander getal dan 1, waardoor 2^{k-1} en (2^k-1) allebei deelbaar zijn?
Opgave 12: Van 2^{k-1} en (2^k-1) weten we wat de som van de delers is. Wat is dus de som van de delers van $a = 2^{k-1}(2^k-1)$?
Opgave 13: Vergelijk het bij opgave 12 gevonden getal met a zelf. Is a een perfect getal?

Het is ook mogelijk om te bewijzen dat een getal n dat perfect is, altijd van de vorm $2^{k-1}(2^k-1)$ moet zijn, met k een bepaald geheel getal. Dit is echter nog veel moeilijker om te bewijzen.

Het is helemaal niet bekend of er oneven perfecte getallen zijn. Er is wel veel onderzoek naar gedaan. Zo is bijvoorbeeld al wel bewezen dat een oneven perfect getal minstens 300 cijfers moet hebben.