Priemgetallen

Deze lesbrief is afkomstig van www.rekenmeemetabc.nl. Op deze site staat nog veel meer informatie, over het onderwerp van deze lesbrief en andere wiskundige onderwerpen. Ook zijn hier puzzels en wedstrijden te vinden.

Veel getallen kun je schrijven als product van andere getallen. Zo kun je 15 bijvoorbeeld schrijven als 5×3 en als 1×15 en 20 als 4×5 of 2×10 of $2 \times 2 \times 5$ of 1×20.

Opgave 1: Op welke manieren kun je 12 als een product schrijven? En 7?

Sommige getallen kun je maar op één manier als product schrijven, namelijk als 1 keer het getal zelf. Zulke getallen heten priemgetallen. De getallen 2, 5, 13 en 23 zijn voorbeelden van priemgetallen. Er is één uitzondering: het getal 1 kun je alleen maar schrijven als 1 x 1, maar toch noemen we 1 geen priemgetal.

Opgave 2: Welke van de getallen 3, 4, 9, 17, 33, 37, 45 zijn priemgetallen?

De *Hoofdstelling van de rekenkunde* zegt dat elk getal te schrijven is als product van priemgetallen, en dat dit voor elk getal maar op één manier kan. De manier waarop een getal als product van priemgetallen te schrijven is, noemen we de priemontbinding van een getal. De priemontbinding van 18 is bijvoorbeeld $2 \times 2 \times 3 \times 3$.

Opgave 3: Wat is de priemontbinding van 28? En van 120? En van 13?

Het vinden van priemgetallen

Priemgetallen komen op veel plaatsen in de wiskunde terug. Wiskundigen zijn dan ook al heel lang genteresseerd in snelle en handige methoden om priemgetallen te vinden. In ongeveer het jaar 240 voor Christus heeft de Griekse wiskundige Eratosthenes hier een heel eenvoudige manier voor bedacht, die nog steeds veel gebruikt wordt. Deze methode heet de zeef van Eratosthenes, omdat de priemgetallen als het ware uit alle getallen gezeefd worden.

Opgave 4: Schrijf de getallen 1 tot en met 50 op.
Opgave 5: We weten al dat 1 geen priemgetal is, deze kun je dus doorstrepen. Het eerste getal wat we nu tegenkomen is 2. Omcirkel 2, en streep daarna alle veelvouden van 2 (dus 4, 6, 8 etc) door.
Opgave 6: Wat is nu het eerste, nog niet doorgestreepte getal wat je tegenkomt? Is dit een priemgetal?
Opgave 7: Omcirkel dit getal, en streep alle veelvouden hiervan weg.
Opgave 8: Wat is nu het volgende nog niet doorgestreepte getal? Herhaal deze twee stap-

pen (het eerste nog niet doorgestreepte getal omcirkelen, en alle veelvouden doorstrepen) totdat alle getallen omcirkeld of doorgestreept zijn.

Met deze methode heb je alle priemgetallen die kleiner zijn dan 50 gevonden. Dit zijn namelijk precies alle omcirkelde getallen. Je kan natuurlijk elke bovengrens kiezen die je wilt, de stappen blijven hetzelfde;

- Omcirkel het eerste getal wat nog niet doorgestreept is;
- Streep de veelvouden van het omcirkelde getal weg.

De bovenstaande manier om priemgetallen te vinden is heel handig om alle priemgetallen onder een bepaald getal te vinden. Maar soms wil je van een bepaald getal weten of het priem is. Daarvoor is dit niet een heel snelle en handige methode. Je hebt namelijk lang niet alle informatie nodig die je met de zeef van Eratosthenes nodig is.

Opgave 9: Als een getal a deelbaar is door een getal b, dan is er dus een c waarvoor geldt $a = b \times c$. Waar is a dus ook deelbaar door?
Opgave 10: Stel dat geldt $a = b \times c$. Kunnen b en c dan allebei groter zijn dan $\sqrt{a}$? *Opgave 11:* Stel dat een getal deelbaar is door 6. Door welke twee priemgetallen is het getal dan ook deelbaar?

Uit de vorige drie opgaven kun je afleiden hoe je moet uitvinden of een getal a een priemgetal is. Als het getal geen priemgetal is, moet het namelijk deelbaar zijn door één of meer priemgetallen, die kleiner zijn dan $\sqrt{a}$.

Opgave 12: Is 539 een priemgetal? En 541?

Mersenne priemgetallen

De Franse wiskundige Marin Mersenne heeft in de 17e eeuw ontdekt dat veel getallen van de vorm $2^n - 1$ priem zijn, als n een priemgetal is.

Opgave 13: Is $2^n - 1$ een priemgetal voor $n = 2, 3, 5, 7, 11$?

Priemgetallen van deze vorm worden Mersenne-priemgetallen genoemd. Er worden grote zoektochten gehouden naar Mersenne-priemgetallen. Momenteel zijn er 44 bekend, de grootste is $2^{32582657} - 1$. Dit getal heeft 9.808.358 cijfers.

Priemtweelingen

Soms is het verschil tussen twee opeenvolgende priemgetallen maar 2. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de priemgetallen 5 en 7. Zulke tweetallen worden priemtweelingen genoemd.

Opgave 14: Vind nog 5 priemtweelingen.

Er zijn heel veel priemtweelingen gevonden, maar het is niet bekend hoeveel er zijn.